J. S. Hedström och C. Rendahl. Analytisk geometri. (Sthlm, A. Bonnier, VII + 162 sidor.)

Boken har ett obestridligt företräde framför den hittills mest använda skolboken i ämnet i ett klarare och lättfattligare uttryckssätt. Delvis beror nog det senare på uteslutningar av en del partier. Så förekommer ej förkortat beteckningssätt i fråga om räta linjen; kursplanens uppgift att ett närmare ingående på frågan om poler och polarer är överflödigt är taget ad notam till den grad, att t. o. m. ordet tangentkorda endast förekommer i svaret till en övningsuppgift rörande cirkeln; styrlinje i fråga om ellips och hyperbel omnämnes ej. Detta sista har annars sitt särskilda intresse vid jämförelse mellan de tre kurvorna, ellips, hyperbel och parabel (parabeln som gränsfall av ellips eller hyperbel, sid. 117); likaväl som de tre ha en gemensam vertex-ekvation, ha de ock en gemensam definition, grundad på fokus och motsvarande styrlinje. Egendomligt, särskilt med hänsyn till att i samma författares lärobok i trigonometri användas härledningar stödda på analytisk geometri, synes slutligen vara, att polarkoordinater förvisas till ett kort kapitel i bokens slut, till på köpet med uppgift i förordet att de kunna förbigås. Nu kan väl medges, att det knappast på skolstadiet är nödvändigt att använda polarkoordinater, men de ge ofta en enklare lösning av förefallande uppgifter, t. ex. vid lokusproblem, när det är fråga om förhållandet mellan eller produkt av två sträckor längs samma linje eller i konstant vinkel och den enas ändpunkt rör sig på en given kurva. Ortsproblem sammanställas i boken först efter parabeln. Detta kan kanske motiveras därmed, att dylika uppgifter ofta äro av något svårare beskaffenhet, men å andra sidan skulle den föregående exempelsamlingen nog vinna i intresse därigenom att dylika uppgifter inrycktes, där de närmast hörde hemma i de olika avdelningarna, och svårigheten kan ju alltid minskas, om en och annan sådan uppgift behandlas mer utförligt i texten.

Tangentproblemet behandlas på det sätt, att ekv. för en tangent med given vinkelkoefficient, i boken kallad »vinkelkoefficientformen», på övligt vis härledes ur villkoret att en skärande rät linje med given vinkelkoefficient parallellförflyttas tills båda skärningspunkterna sammanfalla. Beträffande cirkeln erhålles ekv. för en tangent med given tangeringspunkt, i boken »beröringspunktsformen», ur den från syntetiska geometrin lånade satsen, att tangenten är vinkelrät mot radien till tangeringspunkten, och dess omvändning. Naturligtvis behöver ej den analytiska geometrin låtsa okunnighet om den syntetiskas elementära satser;

vill emellertid påpeka, att det analytiska beviset for nämnda sats fås omedelbart ur tangentens »vinkelkoefficientform», om den skrives under normalformen. För de övriga andragrads kurvorna fås tangentens »beröringspunktsform» genom användning av som bekanta förutsatta satser ur läran om derivatan. Här vill jag göra den principiella anmärkningen, att den både historiskt givna och praktiskt enklaste utgångspunkten för läran om derivatan just är tangentproblemet. Vidare omfattar analytisk geometri ej enbart koniska sektioner; allt vad till skolkursen hör i den vägen bör återfinnas i läroboken, således även undersökning av enklare, huvudsakligen numeriska kurvor av högre gradtal, deras maximi- och minimipunkter, inflexionspunkter, asymptoter o. s. v. Med andra ord, efter mitt förmenande böra analytisk geometri och läran om derivatan, i den mån de avse reallinjens kurs, samarbetas till ett organiskt helt. En annan sak är naturligtvis den funktionsteoretiska grundvalen för differential- och integralkalkylen; den hör ej till skolan utan till högskolan.

Efter dessa allmännare synpunkter några speciella anmärkningar. Sid. 7 förekommer följande kursiverade utlåtande: *För en godtycklig linje räkna vi riktningen positiv åt det håll, dit en punkt på linjen måste röra sig, för att punktens projektion på y-axeln skall röra sig i positiv riktning*. Meningen torde vara, att det är *överflödigt* att låta en linjes riktningsvinkel variera över större område än 180°, emedan trigonometriska tangentens period är 180° (emedan endast rätvinkliga koordinater användas, ges för en linjes vinkelkoefficient direkt en trigonometrisk definition). Tagen efter orden skulle kursiveringen t. ex. innebära, att man från origo ej kunde dra positiva sträckor i 3:dje eller 4:de axelvinkeln — något som förff. själva göra i fig. 13, b och c.

Räta linjens normalform *b (Annan härledning) kunde saklöst slopas, enär den är både mer invecklad och mindre generell än den först givna.[1] En enkel och generell härledning är däremot följande: Av allmänna def. på cosinus följer omedelbart, att räta linjens polarekvation kan skrivas: $r\cos(v-\beta)=p$, där p är normalen mot linjen från polen och β normalens vinkel med polaraxeln. Utvecklar man här $\cos(v-\beta)$ och utbyter $r\cos v$ mot x, $r\sin v$ mot y, erhålles direkt räta linjens normalform. Ännu överflödigare än ovannämnda är »avståndet mellan en punkt och en rät linje, *b (Annan härledning)». Däremot

[1] Här (sid. 27) förekommer en inadvertens i uttrycket... »den vinkel β, som x-axelns pos. riktning bildar med denna normal». Bör vara: den vinkel β, som normalen bildar med x-axeln.

kunde gärna första övningsexemplet till denna avdelning (Bevisa, att den funna regeln även gäller, om — — — origo ligger *mellan* linjerna L och L_1) ha inryckts i texten; det hör till saken, och det är sällan en elev på detta stadium kan klara den på egen hand.

Sid. 56. »De givna punkterna F och F_1 kallas *brännpunkter* eller *foci* (sing. *fokus*); avståndet dem emellan kallas *fokalvidden* eller *fokaldistansen*». Den nya benämningen fokalvidd är olämplig, emedan ordet i optiken användes i annan betydelse, vilken förff. f. ö. begagna i ex. 539 på parabeln. Fullkomligt missvisande är vidare benämningen (sid. 59) transversalaxel på ellipsens storaxel; *alla* ellipsens diametrar äro transversaler. Omotiverat är också att kalla ellipsens mindre axel för konjugataxel (de båda axlarna äro *varandras* konjugatdiametrar). Det tycks ha undgått förff., att orsaken till benämningen konjugataxel för hyperbelns imaginära axel är, att den är transversalaxel till den givna hyperbelns konjugathyperbel.

I förberedelsen till läran om hyperbelns asymptoter (sid. 83) är notens framställning obetingat att föredraga framför textens. Skriver man notens ekv. under formen $\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$, så ser man, att $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x}$ är antingen $+\frac{b}{a}$ eller $-\frac{b}{a}$, beroende på om x och y ha samma eller motsatta tecken. Det torde vara skäl att uttryckligt framhålla, att resonnemanget *endast* är en förberedelse, emedan kvoten $\frac{y - l}{x}$ har samma gränsvärden som $\frac{y}{x}$, för vilket ändligt värde på l som helst. För min del plägade jag utföra denna förberedelse genom att skriva hyperbelns polarekvation under formen

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 v}{a^2} - \frac{\sin^2 v}{b^2},$$

av vilken utan vidare framgår, att $1 : r^2$ går mot 0, således r^2 mot ∞, när $\operatorname{tg}^2 v$ från mindre värden närmar sig $b^2 : a^2$. Den därpå följande *härledningen* av asymptoternas ekvationer förenklas därigenom att både hyperbelns och dess asymptoters ekvationer skrivas under kvadratisk form. Kanske borde det särskilt påpekas, att slutsatsen att $\frac{[\text{illegible}]}{x_2 + y_1}$ går mot 0, när x_1 går mot ∞, nödvändigvis är bunden vid villkoret att x_1 och y_1 ha samma tecken, så att punkterna $(x_1 y_1)$ och $(x_1 y_2)$ verkligen äro motsvarande; dock kan sådant också överlåtas åt den muntliga undervisningen.

I jämförelse mellan ellips, parabel och hyperbel (sid. 117 och 118) borde i satsen: »Uppritas de tre kurvorna (fig. 44), så kommer ellipsen att ligga närmast och hyperbeln längst från x-axeln» för tydlighets skull mellan »kommer» och »ellipsen» inskjutas orden: för samma parameter.

I diskussionen av den allmänna andragradsekvationen säges (sid. 130). »För stora värden på x och y komma i ekvationen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

de tre andragradstermerna att väga över återstående termer». Satsen är naturligtvis sann, men ej självklar. Man erhåller ett enkelt bevis genom att skriva ekvationen i polarkoordinater, dividera överallt med r^2 och därpå låta r gå mot ∞. Då återstår den med avseende på $\sin v$ och $\cos v$ homogena andragradsekvationen

$$A \cos^2 v + B \sin v \cos v + C \sin^2 v = 0,$$

som bestämmer de riktningar, i vilka kurvan kan ha oändlighetspunkter. Utgår man således ifrån att en andragradsekvation måste betyda en konisk sektion eller någon av dess avarter, så följer, att den förra ekvationen representerar en kurva av hyperbelgruppen, parabelgruppen eller ellipsgruppen allt eftersom den senares diskriminant $B^2 - 4AC \gtreqless 0$. I parabelfallet ges axelriktningen direkt av ekv., löst med avs. på $\operatorname{tg} v$; tillhör kurvan ellips- eller hyperbel-grupperna, anges axelriktningarna av de alltid reella bisektriserna till de imaginära eller reella asymptoterna, eller med dem parallella linjer.

Övningsexemplen, till antalet 630, äro dels exempel efter varje paragraf, dels blandade exempel efter vart kapitel. De förra äro mestadels enkla och utgöra dels direkta användningar av det närmast föregående, dels en förberedelse (preparation) till följande avdelning, ett som jag tror gott pedagogiskt grepp.

E. S.